Mecânica Clássica - Observáveis Euclidianos

Mario Cezar Bertin[1]

[1]Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia

September 24, 2020

Rich media available at https://youtu.be/qa0g0JttC58

A física fundamental

Se o objetivo da física é explicar a natureza da matéria em nível fundamental (este não é o único objetivo, mas certamente um de grande motivação), o nível mais profundo de compreensão que temos hoje é o Modelo Padrão das partículas elementares. A Fig. 1 classifica as partículas elementares de acordo com a massa, carga elétrica e spin. No modelo padrão, a matéria é constituída por férmions e bósons. No geral, os férmions são os blocos construtores da matéria, enquanto os bósons participam do processo de interação. Férmions são separados em quarks, partículas massivas com carga elétrica e carga de cor, o que os torna sucetíveis à força nuclear forte, e léptons, como o elétron, que são massivos e podem possuir cargas elétricas definidas. As partículas de interação são denominados Bósons de Gauge e são os portadores das três forças fundamentais constituintes do modelo (a gravitação não está incluída). O Bóson de Higgs, recém descoberto mas previsto pela Teoria Quântica de Campos desde a década de 1960, figura como a única partícula elementar conhecida de spin zero.

Figure 1: Um resumo do Modelo Padrão. https://pt.wikipedia.org/wiki/Modelo_Padr%C3%A3o.

O arcabouço teórico que dá origem ao modelo padrão é a Teoria Quântica de Campos (TQC) Relativísticos, que é a teoria quântica de sistemas sujeitos à relatividade restrita. Nesta teoria, somos forçados a redefinir o conceito de partícula, desta vez relegando-o a um papel derivado. Na TQC, em razão da relatividade restrita redefinir as simetrias fundamentais do espaço e do tempo, já não é possível considerar que as partículas são eternas e indestrutíveis. De fato, a criação e aniquilação de partículas e anti-partículas foi descoberta como elemento fundamental da TQC já na década de 1930. Ainda consideramos que as partículas elementares são adimensionais, mas a origem dessas partículas, em oposição à ideia clássica que os posiciona como atores independentes em um palco euclidiano pré-definido, é severamente distinta. Na TQC o espaço-tempo e suas simetrias fundamentais (tranlações, evolução temporal, rotações e boosts de Lorentz) determinam quais são as partículas permitidas pelo nosso Universo, portanto, o palco ainda é fixo, mas os possíveis atores são definidos pelas propriedades de simetria do espaço-tempo.

Claramente, não é possível que toda a física dependa da TQC para ser compreendida. Isto ocorre porque os fenômenos naturais na escala humana de tamanho e energia são complexos demais para ser explicados com quarks, glúons e léptons. A realidade objetiva permite a descrição através do modelo padrão apenas nos grandes aceleradores de partículas, que alcançam as energias necessárias para que esses objetos possuam relevância. Assim, embora saibamos que a matéria seja fundamentalmente descrita pela tabela 1, esta não é a descrição que utilizamos para fenômenos atômicos e moleculares, para a química, para a biologia, ou mesmo para a mecânica dos corpos macroscópicos, nosso interesse de estudo.

Hoje, sabemos que o conceito fundamental de partícula já não suporta a definição newtoniana, dada a existência de fenômenos que nos obrigam a abrir mão deste conceito em favor de outros mais adequados. Contudo, dentro do arcabouço da mecânica clássica, a partícula newtoniana é um conceito fundador e, até certo ponto, suficiente para a definição de uma realidade objetiva, ainda que limitada.

Assim, as características definidoras de uma partícula, ou seja, seus observáveis intrínsecos, trazem o conceito de partícula à realidade objetiva pois dois observadores quaisquer devem concordar com a medida destes observáveis. É o caso já mencionado da massa, da carga elétrica e do spin. Além desses observáveis, devem existir observáveis extrínsecos, responsáveis por descrever outras características do sistema físico. Se nos atermos à regra de que cada observável possui um objeto matemático correspondente, devemos nos perguntar quais estruturas matemáticas podem ser definidas de modo a satisfazer o critério de realidade da teoria. E, como vimos, ao menos por enquanto, tal critério de realidade está ligado à homogeneidade e isotropia do espaço euclidiano.

Como definir os observáveis?

Um observável representa uma característica do sistema físico que pode ser medida por um observador. O que define sua realidade física é a invariância da medida com relação a determinadas classes de referenciais. Vamos definir essas classes mais adiante. Mas por enquanto, desejamos que dois observadores rotacionados entre si concordem com as medidas que obtêm dos observáveis. Portanto, objetos definidos pela simetria de rotação devem compor o conjunto de observáveis físicos da mecânica clássica. Como vimos, a distância entre dois pontos, que define a forma geométrica de corpos no espaço, é um desses objetos. Matematicamente, há um forma rigorosa de se definir estes observáveis, usando Teoria de Grupos e Representações. Isto está, contudo, fora de nosso escopo. Abaixo, apenas discutirei quais seriam os objetos matemáticos bem definidos segundo essas simetrias.

Funções escalares

O primeiro objeto bem definido pelas simetrias do espaço euclidiano é a função escalar. Uma função escalar f é uma função que leva pontos de $\mathbb{R}^{\nVdash}$ em números reais, o que descrevemos matematicamente por $f : \mathbb{R}^{\nVdash} \to \mathbb{R}$, ou seja, o domínio é todo o conjunto dos pontos no espaço, e o contra-domínio é a reta real. São as funções de três variáveis que estudamos em Cálculo. No geral, escrevemos a função como $f = f\left(x_1, x_2, x_3\right)$, ou seja, como uma regra que relaciona três números reais a um único número real.

Contudo, para que uma função seja uma função escalar, precisamos de mais uma regra. Suponha que um sistema de coordenadas $\{x_1, x_2, x_3\}$ seja rodado para o sistema de coordenadas $\{y_1, y_2, y_3\}$ por uma matriz de rotação R. Esperamos que uma mudança no sistema de coordenadas mude a regra de relação que definie a função, além da denominação do ponto do domínio. Contudo, vamos apenas selecionar as funções que não se alteram diante de uma rotação. Assim,

$$x \to y = Rx \quad \Longrightarrow \quad f\left(x\right) \to f'\left(y\right) = f\left(x\right).$$

Isto quer dizer que a função rodada no ponto transformado precisa ser igual à função original no ponto original, portanto, funções escalares são invariantes por rotações.

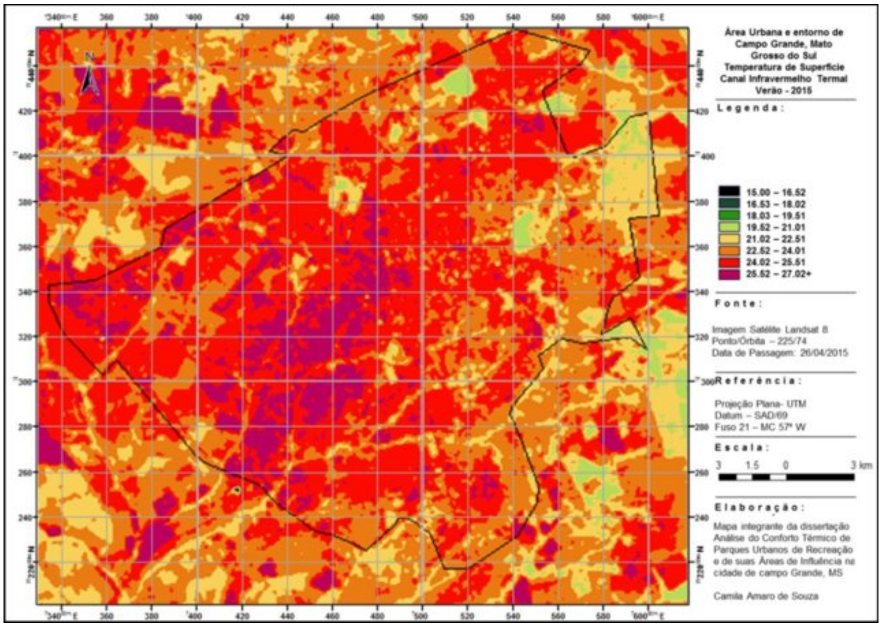

Figure 2: Exemplo de mapa escalar bidimensional. Distribuição Térmica da Cidade de Campo Grande. C. A. de Souza e M. H. S. da Silva em http://dx.doi.org/10.5380/abclima.v21i0.45752.

Um bom exemplo de uma função escalar é a temperatura. Em determinado cômodo, podemos determinar a temperatura como uma função que depende do ponto do espaço. Em um dia quente, a temperatura de um quarto próximo à janela deve ser maior que a temperatura próximo à porta, e ainda maior que a temperatura próximo ao ar condicionado. Esperamos, assim que a temperatura seja uma função real de cada ponto. Além disso, o valor da temperatura em cada ponto não deve mudar se rodarmos o sistema de coordenadas.

Vetores

Um vetor $\boldsymbol{u}$, pertencente a um espaço vetorial real E, é todo objeto que pode

- Ser multiplicado por um número real, $a\boldsymbol{u} \in E \; \forall \; a \in \mathbb{R}$
- Ser somado com outro vetor, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E, \;\; \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in E,$

e possui as seguintes propriedades:

1. A multiplicação por escalar é distributiva: $a\left(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\right) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$;
2. Outra propriedade distributiva: $\left(a+b\right)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$;
3. A soma é associativa: $\boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\right) = \left(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\right) + \boldsymbol{w}$;
4. A multiplicação é associativa: $a\left(b\boldsymbol{u}\right) = \left(ab\right)\boldsymbol{u}$;
5. A soma é comutativa: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$;
6. Existência do elemento neutro da multiplicação: $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$;
7. Existência do elemento neutro da soma: $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$;
8. Existência do elemento inverso da soma: $\left(-\boldsymbol{u}\right) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

A grande maioria dos observáveis físicos são vetores, enquanto muitos objetos matemáticos também o são. Por exemplo, certos conjuntos de matrizes formam um espaço vetorial, assim como funções analíticas em determinados domínios. A visão tradicional de um vetor como uma seta unido dois pontos de um espaço, por outro lado, é uma alegoria pedagógica causadora de muita confusão. Esta confusão vem do fato de que o espaço euclidiano, em si, é um espaço vetorial. Seus pontos, portanto, também são vetores.

Vamos nos lembrar de outras definições importantes envolvendo vetores:

> **Dependência linear:** Dois vetores são Linearmente Dependentes (LD) quando ambos estão relacionados pela multiplicação por número real, ou seja, se $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são LD. Dois vetores LD são também denominados colineares.
>
> **Independência linear**: Um conjunto de vetores $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\} \equiv \{\boldsymbol{u}_i\}$ é linearmente independente se nenhum membro do conjunto for uma combinação linear dos outros membros, ou seja, se nenhum subconjunto de dois vetores é LD. Neste caso, basta que a única solução da equação$\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{u}_i = 0$ seja a solução trivial $a_i = 0 \ \ \forall\ i$.
>
> **Base:** Um conjunto de vetores $B \equiv \{\boldsymbol{e}_i\}$ é denominado uma base do espaço vetorial E se B é LI e se todo vetor de E puder ser escrito como combinação linear dos elementos de B. Dizemos, assim, que E é gerado pela base B.

Há poucas aulas dissemos que os espaços euclidianos são também espaços vetoriais. Portanto, a reta real é um espaço vetorial e os números reais são vetores. É fácil demonstrar que as propriedades de 1 a 7 são obedecidas neste caso. Contudo, no espaço unidimensional apenas um vetor de base existe, visto que todos os outros são colineares. Caso desejemos, podemos eleger o número 1 como base de $\mathbb{R}$. Todos os demais números reais são gerados a partir deste vetor por simples multiplicação .... por números reais. Mas não existirá mais de um vetor que pertence à base de $\mathbb{R}$.

O espaço euclidiano bidimensional $\mathbb{R}^2$ também é um espaço vetorial. Cada ponto é um vetor, o que não contrasta com a alegoria comumente utilizada de que vetores bidimensionais são setas ligando dois pontos do espaço. Enchergar vetores como setas é útil do ponto de vista geométrico, mas propriedades como direção e sentido necessitam de mais estrutura para serem introduzidas. Ainda assim, podemos verificar que $\mathbb{R}^2$ permite uma base de dois elementos, por exemplo, os pontos $\mathbf{e}_1 \equiv (1,0)$ e $\mathbf{e}_2 \equiv (0,1)$ em um sistema de coordenadas cartesiano. Estes não são os únicos exemplos. Quaisquer dois vetores não colineares são geradores de $\mathbb{R}^2$.

Como estamos interessados no espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, observáveis vetoriais serão membros deste espaço. Em $\mathbb{R}^3$, toda base tem três vetores LI, por exemplo, os pontos $\mathbf{e}_1 \equiv (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 \equiv (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 \equiv (0,0,1)$, mais uma vez tomando-se um sistema de coordenadas cartesiano.

Em $\mathbb{R}^3$, como cada ponto é um vetor, podemos agora tratar a posição de uma partícula como vetor. E como todo vetor pode ser escrito como combinação linear de uma base, escrevemos

$$\mathbf{x} \equiv x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e}_i,$$

e este é o vetor posição. Quando escrevemos vetores considerando uma base vetorial, as operações de multiplicação e soma são descritas pelas expressões

$$\begin{aligned} a\mathbf{x} &= (ax_1)\,\mathbf{e}_1 + (ax_2)\,\mathbf{e}_2 + (ax_3)\,\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1)\,\mathbf{e}_1 + (x_2 + y_2)\,\mathbf{e}_2 + (x_3 + y_3)\,\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

O produto escalar

As propriedades usualmente atribuídas aos vetores euclidianos de módulo, direção e sentido dependem da operação de produto interno, também conhecida por produto escalar. O produto escalar é uma relação que leva dois vetores a uma função escalar, ou seja,

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \Phi,$$

em que Φ é o espaço das funções escalares. O produto escalar tem, também, as seguintes propriedades:

1. Simetria: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$;
2. Bilinearidade: $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = a\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + b\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$;
3. Positividade: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$;
4. Não degenerescência: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ se, e somente se, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Note que, no caso do espaço euclidiano, o produto escalar é uma função de seis variáveis, como a função distância. De fato, a distância entre dois pontos é um produto escalar que obedece às propriedades de 1 a 4. Usar a métrica euclidiana como produto escalar implica em definir

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i.$$

Vamos relembrar mais uma definição:

Módulo ou valor absoluto: O módulo de um vetor $\mathbf{x}$ é definido pela expressão

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^2}.$$

Assim, vemos que o módulo de um vetor é a distância entre o ponto de $\mathbb{R}^3$ e a origem do sistema de coordenadas.

Temos também:

Ângulo: O ângulo θ entre dois vetores é definido pela expressão

$$\theta \equiv \arccos\left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|}\right).$$

Neste caso, o ângulo entre dois vetores é definido pelo produto escalar euclidiano. Esta expressão nos remete à definição não rigorosa de produto escalar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \cos\theta$. Portanto, é fato que vetores euclidianos possuem módulo, direção e sentido. Contudo, essas são propriedades de um produto interno, não do espaço vetorial em si. Por esta razão, o espaço euclidiano é usualmente definido como um espaço vetorial com produto interno euclidiano.

Por fim, a noção de ortogonalidade entre vetores também depende do produto escalar:

Ortogonalidade: Dois vetores são ortogonais quando o produto escalar entre eles é igual a zero.

Uma base $\{\mathbf{e}_i\}$ é denominada ortonormal quando

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0 & amp; \text{se } i \neq j \\ 1 & amp; \text{se } i = j \end{cases}$$

e, neste caso, é formada por vetores ortogonais de módulo unitário.

Notação matricial

Não há uma única maneira de denotar os vetores matematicamente. Vetores em si são objetos abstratos, mas podem ser representados por suas componentes uma vez que uma base é escolhida. A forma de expansão em (**??**) é bastante usual, mas nem sempre a mais conveniente.

A notação matricial de um vetor é obtida a partir da escolha de uma base. Se a base é ortonormal e segue a orientação do sistema de coordenadas cartesiano, representamos os vetores de base como

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

ou seja, como vetores coluna. A expressão em (**??**), neste caso, resulta em

$$\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Assim, se temos vetores coluna, temos também suas transpostas, por exemplo

$$\mathbf{x}^T \equiv (x_1, x_2, x_3) = \sum_i x_i \mathbf{e}_i^T. \tag{3}$$

Representamos o produto escalar através do produto matricial

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sum_i x_i^2. \tag{4}$$

Vetores euclidianos (vetores covariantes)

Transformações lineares, como já vimos, são melhor realizadas através de matrizes. Por exemplo, uma rotação passiva, com a qual já nos familiarizamos, consiste na rotação do sistema de coordenadas por uma matriz do grupo $SO(3)$, ou seja, uma matriz ortogonal de determinante igual a 1.

Para que um vetor seja euclidiano, esta transformação considerada sobre a base vetorial dos eixos $\mathbf{e}_i$ deve ter a forma

$$x \to x' = Rx \implies \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}^T \mathbf{e}'_j,$$

em que R_{ij}^T são as componentes da transposta da matriz R

$$R = (R_{ij}) = \begin{pmatrix} R_{11} & amp; R_{12} & amp; R_{13} \\ R_{21} & amp; R_{22} & amp; R_{23} \\ R_{31} & amp; R_{32} & amp; R_{33} \end{pmatrix}.$$

Assim, um vetor $\mathbf{x}$ obedecerá a

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_i x_i \mathbf{e}_i = \sum_i x_i \sum_j R_{ij}^T \mathbf{e}'_j = \sum_{ij} R_{ji} x_i \mathbf{e}'_j \\ &= \sum_{ji} R_{ij} x_j \mathbf{e}'_i = \sum_i x'_i \mathbf{e}'_i, \end{aligned} \tag{5}$$

então,

$$x'_i = \sum_j R_{ij} x_j.$$

Na notação matricial, temos

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = R\mathbf{x}.$$

Usamos (**??**) para definir vetores euclidinos. Neste caso, são **aqueles cujas componentes se transformam como o sistema de coordenadas**. Portanto, dizemos que um vetor euclidiano é um vetor covariante.

É fácil ver que um vetor covariante tem sua norma invariante por rotações. Basta fazer uso do produto escalar:

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' = (\mathbf{x}')^T \mathbf{y}' = (R\mathbf{x})^T R\mathbf{y} = \mathbf{x}^T R^T R\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Portanto, o produto escalar é invariante por rotações. Em razão desta invariância, a norma de um vetor e o ângulo entre dois vetores são, também, invariantes euclidianos.

Funções vetoriais (campos vetoriais)

Uma função vetorial, ou um campo vetorial euclidiano, é um vetor euclidiano cujas componentes são funções de $\mathbb{R}^3$. Neste caso, temos $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, ou seja,

$$\mathbf{u} = u_1(x_1, x_2, x_3)\,\mathbf{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3)\,\mathbf{e}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3)\,\mathbf{e}_3,$$

que também tem notação vetorial dada por

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}.$$

Cada componente é uma função de três variáveis, mas tais componentes continuam se transformando, por rotações, de forma covariante $\mathbf{u}' = R\mathbf{u}$.

Diferenciação de campos vetoriais

A diferencial de um campo vetorial é definida pela expressão

$$d\mathbf{u} = du_1\mathbf{e}_1 + du_2\mathbf{e}_2 + du_3\mathbf{e}_3 = \sum_i du_i\mathbf{e}_i,$$

ou seja, é um vetor cujas componentes são as diferenciais das componentes do vetor $\mathbf{u}$. Assim, também podemos escrever

$$d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix}.$$

O símbolo d, que denota a diferencial total, é um operador derivativo, ou derivada. De forma geral, uma derivada tem as seguintes propriedades (considere $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g, h \in \Phi$)

1. Linearidade: $d(af + bg) = adf + bdg$;
2. Regra de Leibniz: $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$;
3. Regra da composição: se $f = g(h)$, $df = \frac{dg}{dh}dh$.

A diferencial das componentes do vetor $\mathbf{u}$ é definida pela expressão

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3}dx_3 = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j.$$

Nesta expressão, $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ denota a derivada parcial da componente u_i com relação à coordenada x_j.

Outra importante derivada é o gradiente de uma função escalar:

$$\nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\mathbf{e}_3 = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\mathbf{e}_j.$$

Vemos, assim, que as componentes da diferencial total são também as componentes do gradiente de cada u_i.

A terceira derivada de importância em nosso curso é a divergência:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

Trataremos do rotacional na ocasião em que introduzirmos o produto vetorial.

Assim como o operador d, o operador ∇ também é uma derivada. Contudo, o operador gradiente tem componentes que consistem nas derivadas parciais. Exceto pelo fato de que essas componentes são derivadas, e não funções, o gradiente pode ser visto como um vetor:

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_i \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Na notação matricial, temos

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

organizado como um vetor linha.